Systèmes d’équations linéaires

Sommaire

1. Introduction
   1. Notation
   2. Operations élémentaires
   3. Méthodes de résolution
2. Méthodes directes
   1. Elimination de Gauss
      1. Principe de la méthode
      2. Le problème du pivotage
   2. Elimination de Gauss-Jordan
   3. Décomposition LU
      1. Décomposition de Crout’s
      2. Décomposition de Doolittle’s
3. Méthodes itératives ou indirectes
   1. Méthode de Gauss–Seidel
   2. Méthode de Gauss-Jordan
4. Méthodes projectives
5. Exemple d’application avec Matlab

Prérequis:

* Connaissances sur les matrices
* Transformations linéaires
* Transpose et inverse de matrice

1. Introduction

En mathématiques et particulièrement en algèbre linéaire, un système d'équations linéaires est un ensemble constitué d'équations linéaires qui portent sur les mêmes inconnues.

La résolution d'un système d'équations linéaires consiste à déterminer les coordonnées du ou des points de rencontre entre les droites décrites par les équations.

Le problème de la résolution d'un linéaire système se pose dans presque tous les domaines de l'ingénierie et de la science, y compris la structure des matériaux, la statique et la dynamique, la conception et analyse de circuits, physique quantique.

Dans ce qui va suivre, nous présenterons les différentes approches pour trouver la solution à un système d’équations linéaires. Celles que nous présenterons sont les méthodes directes, indirectes ou itératives et enfin les méthodes projectives.

Par ailleurs puisse que nous faisons face en général a un système ayant un même nombre d’équations et d’inconnues , nous nous limiterons a ce type de système.

* 1. Notations

Une équation linéaire de n inconnues , , . . . , est une équation de la forme

Ou sont des réels. , , . . . , est une famille d’équations

(1.1)

On souhaiterait déterminer si un tel système possède une solution , c’est-à-dire trouver s’il existe des réels , , . . . , qui satisfont chaque equation simultanement.

On dit qu’un système d’équations linéaires est consistant s’il possède une solution autrement le système est dit inconsistant.

Un systèmes de n équations linéaires a n inconnues.

Le système (1.1) peut se réécrire comme suit :

(1.2)

Ou encore AX=b avec :

A = , X = , b =

La matrice augmentée correspondante a notre système est

(1.3)

A titre d’exemple , le système

Sa matrice augmentée est :

* 1. Operations élémentaires

Les opérations que nous pouvons effectuer sur les lignes de la matrice augmentée sans changer la solution du système sont les suivantes :

1. Permutation de ligne
2. Multiplication d’une ligne par un scalaire
3. Ajouter plusieurs fois une ligne a une autre
   1. Méthode de résolution

Plusieurs approches ont étées développées pour résoudre les systèmes d’équations linéaires, les techniques les plus courantes sont :

* Les méthodes directes :
  + Elimination de Gauss
  + Décomposition LU
    - Décomposition de choleski
    - Décomposition de Crout’s
    - Décomposition de Doolittle’s
  + Elimination de Gauss-Jordan
* Les méthodes itératives :
* méthode de Gauss-Seidel
* Méthode de Gauss-Jordan
* Les méthodes projectives

Dans ce qui suit nous présentons ces dernières.

1. Méthodes directes
   1. Elimination de Gauss
      1. principe de la méthode

L’élimination de Gauss applique les opérations citées plus hauts sur la matrice augmentée jusqu’à ce que la matrice soit réduite sous forme triangulaire supérieure.

Définition

Une matrice dont les éléments sont tels que suit :

Est appelée matrice triangulaire supérieure

Partant d’une matrice et en appliquant les opérations sur les lignes de la matrice

cherche à la réduire sous forme triangulaire supérieure

qui est plus facile qui peut être alors résolue par une substitution en arrière.

Soit le système de n équations linéaires a n inconnues représente par la matrice augmentée (1.3)

Il y deux étapes dans la méthode de Gauss : l’élimination des inconnues et la substitution en arrière

Étape 1: les inconnues sont éliminées pour obtenir une matrice triangulaire supérieure.

Pour éliminer de la seconde ligne , on multiplie la première par et on l’additionne a la seconde c’est-à-dire : et nous obtenons

Qui peut être réécrite comme :

Ou

En procédant la même façon pour éliminer dans les autres équations , nous obtenons la matrice augmentée suivante

(1.4)

Par la suite on élimine dans les dernières lignes de (1.4)

Il est important de souligner que la méthode ci haut ne marche que si notre élément pivot . Nous parlerons plus tard du problème du choix du pivot.

Maintenant pour éliminer de la 3 ligne , on multiplie la seconde par et on l’additionne a la troisième c’est-à-dire : et ainsi de suite pour les autres lignes. Nous obtenons finalement la matrice augmentée suivante :

Les «doubles cotes indiquent que l’élément a changé deux fois».

Il est facile de constater que nous pouvons continuer cette procédure pour éliminer des dernières équations puis et ainsi de suite. Finalement nous obtiendrons la réduction en matrice triangulaire supérieure de (1.3) en

(1.5)

Ou indique que l’élément a change fois.

Et nous avons terminé avec la première étape.

Etape 2 : la substitution en arrière

Maintenant devons obtenir la solution cherche à partir de (1.5).

A partir de la dernière ligne on obtient

Qui sera substitue dans les premières équations pour obtenir et le processus est répété pour obtenir les autres inconnues.

Nous avons d’abord calculer puis dans cet ordre. C’est la raison pour laquelle cette étape est appelée substitution arrière.

Exemple utilisons l’élimination de Gauss pour résoudre le système suivant

Sous forme matriciel il se réécrit comme

On commence par éliminer de la deuxieme et troisieme equation.

Pour cela

Et on obtient la nouvelle matrice suivante

Il ne nous reste qu’a éliminer de la troisieme equation.

On se retrouve finalement avec

Qui est une matrice triangulaire supérieure.

En appliquant la substitution arrière , on trouve

* + 1. Problème du pivotage

Nous entrons maintenant dans une partie importante le choix du pivot.

Dans certaines situations , on se retrouve souvent avec le pivot = 0 ou tres proche de 0.

Si le pivot est nul , la procédure entière décrite ci-haut échoue et s’il est très proche de 0 , des erreurs d’arrondi peuvent se produire. Ces problèmes peuvent être évités en adoptant une procédure appelée pivotage. Si le pivot = 0 ou tres proche de 0 compare aux autres coefficients , alors on cherche le plus grand coefficient dans les colonnes en dessous de et on interchange les deux lignes. De cette facon , on obtient une nouvelle ligne pivot avec un pivot non nul ou très petit en valeur absolue.

Une telle procédure s’appelle **pivotage partielle** car nous cherchons uniquement dans la colonne de le plus grand element (en valeur absolue). Si d’un autre cote on cherche parmis les lignes et les colonnes , pour trouver le plus grand element , on parle de **pivotage complet.**

Exemple : résoudre le système suivant :

Sa matrice augmentée est :

La solution exacte est

On résout tout d’abord le système en pivotant et le système se réécrit comme suit :

On éliminer de la deuxieme et on obtient la matrice triangulaire supérieure suivante

La substitution arrière nous donne

Sans pivotage , l’élimination de Gauss nous donne la matrice suivante :

La substitution arrière nous donne

On peut clairement constater l’effet du pivotage.

* 1. Elimination de Gauss-Jordan

Cette approche est une modification de celle de l’élimination de Gauss. La différence essentielle réside dans le fait que lorsqu’une inconnue est éliminer , elle l’est éliminée de toute les équations (échelonnage). On se passe ainsi de l’étape de la substitution arrière pour obtenir la solution.

Exemple illustratif : résolvons le système suivant

Sa matrice augmentée est

Suivant la méthode de Gauss-Jordan , l’élimination de de la seconde et la troisième équation est similaire a celle de Gauss et on obtient

Maintenant on élimine de la première et la troisième équation , ce qui nous donne

On a comme précédemment